N1 : Calculs numériques - Nombres Premiers

« Vu au cycle 4 » p 42

I- Déterminer la forme irréductible d'une fraction

1- Nombres rationnels

Définition

Un nombre **rationnel** est un nombre qui peut s'écrire comme une **fraction**, c'est-à-dire sous la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers relatifs avec $q \neq 0$.

Remarque :

- Les nombres **entiers**, les nombres **décimaux** et les **fractions** sont des **nombres rationnels**.
- Il existe des nombres qui ne sont pas rationnels.

  Par exemple : π et $\sqrt{2}$, qui ne peuvent pas s'écrire sous forme de fraction sont des **irrationnels**.

2- Fraction irréductible

Définition

a et b désignent **deux entiers relatifs**, avec $b \neq 0$.

On dit que la fraction $\frac{a}{b}$ est **irréductible**

si le **seul diviseur** positif commun à a et b est égal à 1.

Exemple :

$\frac{5}{8}$ est une fraction irréductible car le **seul diviseur** positif commun à 5 et 8 est **1**.

Méthode

$\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ désignent **deux entiers relatifs**, avec $\mathbf{b} \neq 0$.

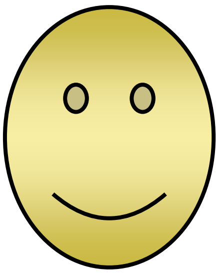
Pour rendre la fraction $\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ **irréductible**, on peut :

- simplifier la fraction $\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ en plusieurs étapes, jusqu'à ce qu'on ne puisse plus la simplifier ;

ou

- décomposer le numérateur $\mathbf{a}$ et le dénominateur $\mathbf{b}$ en produits de facteurs premiers puis simplifier.

Exemple : On cherche la forme irréductible de $\dfrac{24}{60}$.



$$\frac{24}{60} = \frac{24:2}{60:2} = \frac{12}{30} = \frac{12:2}{30:2} = \frac{6}{15} = \frac{6:3}{15:3} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

ou

$$\frac{24}{60} = \frac{2^3 \times 3}{2^2 \times 3 \times 5}$$

On décompose24 et 60 en produits de facteurs premiers.

$$= \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times \cancel{3}}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times 5}$$

Puis on simplifie.

$$= \boxed{\frac{2}{5}}$$

Applications : Exercices n° 54 (b et c) , 56, 63 et 66 p 49 ; n° 71 p 50 ; n° 62 p 49 ;

II- Calculer avec des fractions

Revoir les leçons de 4èmes (Fiches 8, 9 et 10 p 246 et 247 du manuel)

(AP : Exercices 1 à 13 Fiches Photocopiées.)

III- Nombre premier

Activité 1 p 43

1- Reconnaitre un nombre premier

Définition

Un **nombre premier** est un nombre positif qui admet exactement **deux diviseurs** :

1 et **lui-même** .

Exemples:

★ **6** n'est **pas** un nombre premier car il admet **2** et **3** comme diviseurs, puisque **6** = **2** $\times$ **3**.

★ **7** est un **nombre premier** car il n'est divisible que par **1** et par **7**, puisque **7** = **1** $\times$ **7** .

Remarque :

- **0 n'est pas premier**, car il possède une **infinité de diviseurs**.
- **1 n'est pas premier**, car il possède **un seul diviseur : lui même**.
- **2 est le seul nombre premier pair**, car tous les nombres pairs sont divisibles par 2.

Propriétés

- Il existe **une infinité de nombres premiers**.
- **Les 25 nombres premiers inférieurs à 100 sont** :

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47

53 59 61 67 71 73 79 83 89 97.

Méthode

Soit **N** un **entier supérieur ou égal à** 2.

Pour montrer que **N est premier**, il suffit de montrer que

N n'est divisible par **aucun** nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{N}$.

Exemple:

On veut savoir si 157 est un nombre premier.
$\sqrt{157} \approx 12{,}5$. Il faut donc tester la divisibilité de 157 par 2, par 3, par 5, par 7 et par 11.
157 n'est divisible par aucun de ces cinq nombres, donc 157 est premier.

On peut aussi montrer que 157 n'est divisible par aucun nombre entier entre 2 et 12, mais c'est plus long…

Applications : Exercices n° 10, 11, 13 p 46 ; n° 26 et 37 p 47.

2- Décomposer un entier en produit de facteurs premiers

Propriété

Tout nombre entier peut s'écrire comme

un produit de facteurs premiers.

Exemples:

★ $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ ou $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

★ $728 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 13$ ou $728 = 2^3 \times 7 \times 13$

Remarque :

Pour un entier donné, il n'existe qu'une seule décomposition en produit de facteurs premiers

(si l'on ne tient pas compte de l'ordre des facteurs)

Applications : Exercices n° 2 et 4 p 45 ; n° 20, 24, 14 et 18 p 46 ;

n° 49 et 50 p 48 ; n° 53 et 58 p 49 .

IV- Règles de calcul sur les puissances

« Vu au cycle 4 » p 10 ; Exercices n° 10, 11, 12, 13, 14 et 15 p 14

Propriétés

Pour **n et p entiers relatifs** ; et $a \neq 0$.

$a^n \times a^p = a^{n+p}$	$\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$	$(a^n)^p = a^{n \times p}$

Exemples 1 :	Exemples 2 :	Exemples 3 :
➢ $4^2 \times 4^3 = \underbrace{4 \times 4}_{\text{2 facteurs égaux à 4}} \times \underbrace{4 \times 4 \times 4}_{\text{3 facteurs égaux à 4}}$ $= 4^{2+3}$ $= 4^5$ ➢ $10^3 \times 10^{-4} = 10^{3+(-4)}$ $= 10^{3-4}$ $= 10^{-1}$ $= \dfrac{1}{10} = 0{,}1$	➢ $\dfrac{2^3}{2^7} = 2^{3-7}$ $= 2^{-4}$ $= \dfrac{1}{2^4}$ ➢ $\dfrac{10^3}{10^{-2}} = 10^{3-(-2)}$ $= 10^{3+2}$ $= 10^5$ $= 100\,000$	➢ $(2^3)^4 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3$ $= 2^{3 \times 4}$ $= 2^{12}$ ➢ $(10^3)^{-2} = 10^{3 \times (-2)}$ $= 10^{-6}$ $= \underbrace{0{,}000\,001}_{\text{6 chiffres après la virgule}}$

Propriétés

Pour **n entier relatif** ; et $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

$(a \times b)^n = a^n \times b^n$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Exemples 1 :	Exemples 2 :
➢ $(5 \times 3)^2 = 5^2 \times 3^2$ $= 25 \times 9$ $= 225$ ➢ $5^4 \times 2^4 = (5 \times 2)^4$ $= 10^4 = 10\,000$	➢ $\left(\dfrac{-5}{3}\right)^2 = \dfrac{(-5)^2}{3^2} = \dfrac{25}{9}$ ➢ $\left(\dfrac{10}{3}\right)^{-2} = \left(\dfrac{3}{10}\right)^2$ $= \dfrac{3^2}{10^2} = \dfrac{9}{100} = 0{,}09$

Applications :

n° 21, 25 p 14 ;

n° (33 à 37) (b), 39, 40, 41, 42 (a et c) p 15 ;

n° 119 p 24 ; n° 94 p 21 ;

(n° 87 p 20
et n° 95 p 21).

V- Priorités opératoires

Conventions de priorités

Pour calculer une expression numérique,

on effectue d'abord **les calculs entre parenthèses**,

puis **les puissances**,

puis **les multiplications et les divisions**

et enfin **les additions et les soustractions**.

Exemple 1 :

$A = 10 - 3 \times 2^3$

$A = 10 - \underbrace{3 \times 8}$

$A = 10 - 24$

$\boxed{A = -14}$

Exemple 2 :

$B = (6 + 3^2) \times 10$

$B = \underbrace{(6 + 9)} \times 10$

$B = 15 \times 10$

$\boxed{B = 150}$

Applications : n° 71, 72, 75, 77 p 18 ; n° 109, 106 p 23 et n° 118 p 24.

VI- Puissances de dix et écriture décimale

Propriété

n désigne **un nombre entier strictement positif**.

$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{n \text{ facteurs égaux à } 10} = 1\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ zéros}}$	$10^{-n} = \dfrac{1}{10^n} = \dfrac{1}{\underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{n \text{ facteurs égaux à } 10}} = 0,\underbrace{0\ldots01}_{n \text{ chiffres après la virgule}}$

Exemple 1 :

$10^9 = 1\underbrace{000\,000\,000}_{9 \text{ zéros}}$ (1 milliard)

Exemple 2 :

$10^{-6} = 0,\underbrace{000\,001}_{6 \text{ chiffres après la virgule}}$ (1 millionième)

Applications : n° 49, 50 p 16 et n° 107 p 23.

VII- Notation scientifique

Activité 2 p 11

1- Définition d'une notation scientifique

Définition

La notation scientifique d'un nombre **décimal différent de 0** est

la seule écriture de la forme $a \times 10^n$, où :

- a est un nombre **décimal** écrit avec **un seul chiffre, autre que 0, avant la virgule** ;
- n est un nombre **entier relatif**.

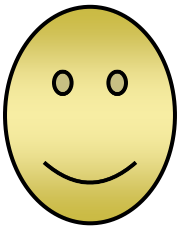
Exemple 1 : Notation scientifique de 178 500

178 500 = 1,78 500 $\times\ 10^5$

Soit $\boxed{178\,500 = 1{,}785 \times 10^5}$

On place **la virgule** après le 1er chiffre autre que 0.

L'exposant indique le nombre de rangs dont il faut déplacer la virgule vers la droite pour retrouver le nombre initial 178 500.



Exemple 2 : Notation scientifique de 0, 00 682

0,00 682 = 0 006,82 $\times\ 10^{-3}$

Soit $\boxed{0{,}00\,682 = 6{,}82 \times 10^{-3}}$

On place **la virgule** après le 1er chiffre autre que 0.

L'exposant indique le nombre de rangs dont il faut déplacer la virgule vers la gauche pour retrouver le nombre initial 0,00 682.

2- Ordre de grandeur d'un nombre

Pour obtenir un ordre de grandeur d'un nombre tel que 178 500,

tout d'abord on détermine sa notation scientifique,

puis on peut procéder de différentes façons :

- 178 500 = 1,785 $\times\ 10^5$ et 1,785 $\approx$ 2 ;

par conséquent **un ordre de grandeur est 2×10^5**.

- On prend la puissance de dix la plus proche,

par conséquent **10^5 est un ordre de grandeur**.

Applications : n° 8, 7, 9 p 13 ;

n° 19, 20, 26, 27 p 14 ;

n° 58, 59(a, b, e), 60(a et c), 65, 66, 67 et 69 p 17 ;

n° 112, 113, 114 et 115 p 24.